УДК 532.546

Ч.Дж. Джаныбеков, М.У. Мурзакматов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕНОСЕ ЗАГРЯЗНИТЕЛЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

На основе теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений численно решается задача идентификации коэффициента диффузии и пористости среды.

1. Постановка проблемы

При изучении движения жидкости в пористой среде учитывается изменение во времени не только массовой концентрации mc (m – пористость среды) вещества в жидкой фазе, но и концентрации N твердой фазы, причем обе концентрации рассчитываются на единицу объема пористой среды (вместе с жидкостью) [1,2].

В общем виде для несжимаемой жидкости, движущейся в пористой среде со скоростью фильтрации $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, можно ввести понятие массовой скорости $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ вещества, ассоциированного с жидкостью [2,3]:

$$u_i = v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

Здесь и далее повторяющиеся индексы являются индексами суммирования, D_i – компоненты коэффициента конвективной диффузии, содержащей молекулярную диффузию и гидродинамическую дисперсию.

Уравнения диффузии и массообмена при полном насыщении почвы влагой представляются в виде

$$\frac{\partial(mc)}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \varphi(c,N), \tag{1.3}$$

где c – концентрация соли, движущейся со скоростью $\vec{v}$, N – концентрация твердой фазы. В конкретных задачах функция φ имеет определенное аналитическое выражение.

В рассматриваемой постановке концентрация твердой фазы не учитывается, поэтому в уравнении (1.2) член $\partial N/\partial t$ выпадает, а уравнение (1.3) отсутствует.

Итак, будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial(mc)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}\right) = f(x,t), \tag{1.4}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \in (0, T)$, f – заданная функция, описывающая вклад загрязнителей (она обычно зависит и от концентрации, здесь с целью демонстрации алгоритма ее будем брать в представленном виде).

К уравнению (1.4) присоединяются уравнения фильтрации (точнее, линейный закон Дарси)

$$v_i = -k \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3 \tag{1.5}$$

и уравнение неразрывности для жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (1.6)$$

где $h = p / \gamma$ – функция напора, k – коэффициент фильтрации, p – давление, $\gamma = g\rho$ – объемная масса жидкости, ρ – плотность жидкости и g – ускорение силы тяжести.

Понятно, что о решении уравнения (1.4) следует вести речь при наличии поля функции v_i в области V, где решается соответствующая краевая задача. Поскольку способы вычисления поля скорости фильтрации $\vec{v}$ нами хорошо изучены [4 – 6] , мы здесь остановимся только на проблеме моделирования процесса распространения концентрации загрязнителя $c(x, t)$ при известном поле скоростей $\vec{v}$.

Обычно с целью упрощения коэффициент конвективной диффузии предполагается линейно зависящим от скорости фильтрации и представляется в виде [3]

$$D_i = D_м + \lambda_i v, \quad i = 1,2,3.$$

Здесь v – модуль скорости фильтрации, $D_м$ – коэффициент молекулярной диффузии в пористой среде, λ_i – параметр дисперсии, $D_i = D_i(x)$.

Цель математического моделирования переноса загрязнителя подземными водами заключается в описании процесса изменения концентрации в каждой точке области течения в любой момент времени, для чего используется математическая модель процесса (1.4) совместно с начально-краевыми условиями.

Соотношения (1.1) называются законом Фика. В более общем представлении D_i является тензорной величиной, зависящей от координат точек, скорости потока и от свойств среды. Эти зависимости должны определяться с помощью эксперимента. Экспериментальное определение их достаточно дорого и требует значительных материальных и временных ресурсов. Они, как правило, для конкретных объектов представляются довольно грубо, поэтому возникает необходимость с практически достаточной точностью привести в соответствие математическую модель с изучаемым объектом, т.е. необходимо провести идентификацию.

Чтобы получить единственное решение, описывающее процесс, к уравнению (1.4) необходимо присоединить конкретные начально-краевые условия, о которых будем вести речь в последующих пунктах.

Таким образом, при неизвестности или недостаточной точности задания коэффициентов, начально-краевая задача для уравнения параболического типа (1.4) будет недоопределенной или математически – некорректно поставленной. Для получения достаточно полной информации о коэффициентах D_i для конкретного объекта необходимо провести экспериментальную работу или организовать серию наблюдений и измерений, при этом требуемая информация всегда будет недостаточной. Чтобы иметь возможность преодолеть такого рода затруднения и получить относительно недорогую информацию, необходимо использовать математическую модель процесса при наличии минимальной информации о значениях коэффициентов, выражающих механические, физические и химические свойства изучаемого объекта.

Таким образом, математическая модель используется с таким расчетом, чтобы при ее адекватности изучаемому объекту и наличии минимально необходимой информации о поточечных значениях искомого коэффициента (или искомой функции) восстановить коэффициент диффузии D_i и пористость грунта $m(x,t)$ в области течения и построить поле распространения концентрации загрязнителя в каждый момент времени.

Численная реализация проблемы проводится на основе теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений.

Следующий пункт посвящен построению математического аппарата, связанного с этими теориями применительно к математической модели массопереноса, описанного уравнением (1.4).

2. Сопряженная задача для математической модели переноса

Построим сопряженное дифференциальное уравнение для уравнения переноса. С этой целью введем гильбертово пространство H, в котором скалярное произведение для любых двух функций g и h из H определяется по формуле

$$(g,h)=\int_0^T dt\iiint_V ghdv, \tag{2.1}$$

где $t\in(0,T)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in V$, $dv = dx_1\, dx_2\, dx_3$.

Уравнение переноса (1.4) представим в операторном виде

$$\Lambda c = f,\ x\in V,\ t\in(0,T) \tag{2.2}$$

с начальным

$$c(x,t)|_{t=0} = c(x,0) = c_0(x) \tag{2.3}$$

и краевым

$$lc = \alpha(x,t),\quad x\in\Sigma=\partial V,\quad t\in(0,T) \tag{2.4}$$

условиями. Предполагаем, что коэффициенты и граница области удовлетворяют требованиям, которые обеспечивают необходимую гладкость. В задаче (2.2) – (2.4) приняты обозначения

$$\Lambda=\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i-D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=T+L,$$

$$l=D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ n_i+\beta(x,t),\ \ n_i=cos(n,x_i),$$

$$T=\frac{\partial m}{\partial t},\quad L=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i-D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\quad i=1,2,3. \tag{2.5}$$

Линейному оператору Λ поставим в соответствие сопряженный оператор Λ^* на основе тождества Лагранжа

$$(c^*, \Lambda c)=(c, \Lambda^* c^*), \tag{2.6}$$

где $c^*(x,t)$ – функция, сопряженная к $c(x,t)$. С этой целью построим выражение

$$(c^*,\Lambda c)=\int_0^T dt\iiint_V c^*\Lambda c\, dv. \tag{2.7}$$

Правую часть формулы (2.7) преобразуем следующим образом:

$$\int_0^T dt\iiint_V c^*\frac{\partial mc}{\partial t}dv=\iiint_V dv\int_0^T c^*\frac{\partial mc}{\partial t}dt=\iiint_V (c^*mc)\Big|_0^T dv-\int_0^T dt\iiint_V mc\frac{\partial c^*}{d\,t}dv=$$

$$=\iiint_V\left[(cmc^*)_T-(cmc^*)_0\right]dv-\int_0^T dt\iiint_V mc\frac{\partial c^*}{\partial t}dv. \tag{2.8}$$

На основании формулы интегрирования по частям имеем

$$\iiint_V c^*\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_ic-D_i\frac{\partial\, c}{\partial x_i}\right)dv=-\iiint_V v_ic\frac{\partial c^*}{\partial x_i}dv+\iint_\Sigma c^*c\,v_in_id\sigma+\iiint_V D_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c^*}{\partial x_i}dv-$$

$$-\iint_\Sigma c^*D_i\frac{\partial c}{\partial x_i}n_id\sigma=-\iiint_V v_ic\frac{\partial c^*}{\partial x_i}dv+\iint_\Sigma cc^*v_nd\sigma-\iiint_V c\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)dv+$$

$$+\iint_\Sigma cD_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}n_id\sigma-\iint_\Sigma c^*(\alpha-\beta c)d\sigma=-\iiint_V c\left[v_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)\right]dv+$$

$$+\iint_{\Sigma} cc^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} cD_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i d\sigma - \iint_{\Sigma} c^*(\alpha - \beta c) d\sigma. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.7), получим

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c\, dv = \int_0^T dt \iiint c\left[-m\frac{\partial c^*}{\partial t} - v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)\right] dv +$$

$$+\iiint_V \left[(cmc^*)_T - (cmc^*)_0\right] dv + \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} cc^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} cD_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i d\sigma - \right.$$

$$\left. - \iint_{\Sigma} c^*(\alpha - \beta c) d\sigma \right] dt. \tag{2.10}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.10), представим в виде уравнения

$$\Lambda^* c^* = p(x, t), \quad x \in V, \quad t \in (0,T), \tag{2.11}$$

которое будет сопряженным к уравнению (2.2). Здесь p – заданная функция источников, а оператор

$$\Lambda^* = -m\frac{\partial}{\partial t} - v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad i = 1,2,3 \tag{2.12}$$

называется сопряженным оператором, а функция $c^*(x,t)$ – сопряженной функцией к $c(x,t)$. К уравнению (2.11) присоединим краевое условие

$$l^* c^* = D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i + \beta\, c^* = \alpha^*(x,t), \quad x \in \Sigma = \partial V. \tag{2.13}$$

Из (2.5) и (2.13) видно, что операторы l и l^* совпадают. Для определенности потребуем, чтобы, функция c^* была периодической с периодом T:

$$c^*(x,0) = c^*(x, T). \tag{2.14}$$

Как известно, пористость грунта мало изменяется с течением времени. В связи с этим можно допустить, что она является функцией только от координат, т.е. $m=m(x)$. Тогда, учитывая (2.14) и полагая, что

$$(cc^*m)|_T - (cc^*m)|_0 = m(x)[c(x,T)c^*(x,T) - c(x,0)c^*(x,0)] = 0, \tag{2.15}$$

приходим к выводу, что функция $c(x,t)$ также периодична с периодом T, и наоборот, считая функцию $c(x,t)$ периодической, можно получить равенство (2.15).

Из (2.10) с учетом условий (2.15), (2.13) и (2.11) имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c dv = \int_0^T dt \iiint_V c\Lambda^* c^* dv + \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} cc^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} (c\alpha^* - c^*\alpha) d\sigma\right] dt. \tag{2.16}$$

Здесь $v_n = v_i n_i = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$ – проекция вектора скорости фильтрации к внешней нормали $\vec{n}$.

При моделировании переноса загрязнителей подразумевается, что основным транспортером загрязнителя является фильтрационный поток. Поскольку поток просачивается сквозь область фильтрации V, в зависимости от того, втекает поток в эту область или вытекает из нее, вектор v_n меняет знак. В связи с этим введем обозначения

$$v_n^+ = \begin{cases} v_n, & если \quad v_n > 0, \\ 0, & если \quad v_n < 0, \end{cases}$$

$$v_n = v_n^+ + v_n^-.$$

Если, кроме того, допустить, что краевые условия (2.4) и (2.13) однородны, т.е. $\alpha = \alpha^* = 0$ и фильтрационный поток втекает в область V и вытекает из нее, то из (2.16) получаем тождество Лагранжа:

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c \; dv = \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* \; dv.$$

Равенство (2.10) с учетом краевого условия (2.13) представим в виде

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c dv - \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* \, dv = \iiint_V \left[(cmc^*)_T - (cmc^*)_0 \right] dv + \int_0^T dt \iint_\Sigma (c\alpha^* - c^*\alpha) d\sigma . \tag{2.17}$$

С другой стороны, умножая уравнение (2.2) на функцию c^*, а уравнение (2.11) – на функцию c, проинтегрировав каждое равенство и вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c dv - \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* dv = \int_0^T \iiint_V (c^* f - cp) dv \; dt . \tag{2.18}$$

Введем, как и в [7,8], для линейных функционалов обозначения

$$J_f \left[c^* \right] = \iiint_V c^* f \; dv, \qquad J_p \left[c^* \right] = \iiint_V cp \, dv. \tag{2.19}$$

Из (2.17) с учетом (2.18) и (2.19) приходим к равенству

$$\int_0^T \left(J_f \left[c^* \right] - J_p [c] \right) dt = \iiint_V \left[(cc^* m) \big|_T - (cc^* m) \big|_0 \right] dv +$$

$$+ \int_0^T \left[\iint_\Sigma cc^* v_n d\sigma + + \iint_\Sigma (c\alpha^* - c^*\alpha) d\sigma \right] dt, \tag{2.20}$$

связывающему сопряженные функции c и c^* с начально-краевыми условиями, т.е. с входными параметрами задачи.

Возвращаемся к равенству (2.18). Она верно при всех $t \in (o,T)$, т.е.имеем место равенство

$$\iiint_V c^* \Lambda c dv - \iiint_V c \Lambda^* c^* dv = \iiint_V c^* f dv - \iiint_V cp \, dv. \tag{2.21}$$

С помощью формулы Грина преобразуем левую часть (2.21):

$$\iiint_V c^* \frac{\partial (mc)}{\partial t} dv + \iiint_V cm \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = \iiint_V \frac{\partial (cc^* m)}{\partial t} dv \; , \tag{2.22}$$

$$\iiint_V c^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) dv + \iiint_V c \left[v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) \right] dv = \iint_\Sigma cc^* v_n d\sigma +$$

$$+ \iint_\Sigma (c\alpha^* - c^*\alpha) d\sigma. \tag{2.23}$$

Из (2.21) с учетом (2.22), (2.23) и (2.19) получим равенство

$$J_f\left[c^*\right]-J_p\left[c\right]=\iiint_V \frac{\partial(mcc^*)}{\partial t}dv+\iint_\Sigma cc^*v_n d\sigma+\iint_\Sigma (c\alpha^*-c^*\alpha)d\sigma, \qquad (2.24)$$

верное при всех $t\in(0,T)$.

3. О единственности решения сопряженной задачи

Итак, мы получили краевую задачу (2.11) – (2.13) для сопряженной функции $c^*(x,t)$. Поскольку функция c^* связана с физической величиной - функцией концентрации $c(x,t)$ условием сопряженности, то они на концах временного отрезка $[0, T]$ должны удовлетворять условию (2.15). Легко видеть, что задача (2.11) – (2.13) является ретроспективной, т.е. ее следует решать в обратном направлении изменения переменной t (от $t=T$ до $t=0$).

Пусть «начальным» условием ретроспективной задачи будет

$$c^*(x,T)=c_T{}^*(x)=\varphi^*(x), \qquad (3.1)$$

где $\varphi^*(x)$ – заданная функция.

Докажем, что существует единственное решение задачи (2.11) – (2.13) и (3.1). С этой целью умножим уравнение (2.11) на c^* и проинтегрируем по t от $t=0$ до $t=T$:

$$-\int_0^T dt\iiint_V c^*m\frac{\partial c^*}{\partial t}dv-\int_o^T dt\iiint_V\left[c^*v_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}+c^*\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)\right]dv=\int_0^T dt\iiint_V c^*p\,dv. \qquad (3.2)$$

Преобразуем слагаемые, стоящие в левой части равенства (3.2):

$$-\int_0^T dt\iiint_V c^*m\frac{\partial c^*}{\partial t}dv=-\iiint_V\frac{m}{2}\left(\int_0^T\frac{\partial c^{*2}}{\partial t}dt\right)dv, \qquad (3.3)$$

$$\iiint_V c^*v_i\frac{\partial c^*}{\partial t}dv=\frac{1}{2}\iiint_V v_i\frac{\partial c^{*2}}{\partial x_i}dv=-\frac{1}{2}\iiint_V c^{*2}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dv+\frac{1}{2}\iint_\Sigma c^{*2}v_i\;n_i\;d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_\Sigma c^{*2}v_n d\sigma, \qquad (3.4)$$

так как в области V $div\,\vec{v}=\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}=0.$

$$\iiint_V c^*\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)dv=-\iiint_V D_i\left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i}\right)^2dv+\iint_\Sigma c^*(\alpha-\beta c^*)d\sigma. \qquad (3.5)$$

Для сопряженной функции c^* полагаем , что

$$-v_n=v_n^++v_n^-, \qquad (3.6)$$

причем

$$v_n^+=\begin{cases}-v_n, & если\;\; v_n>0,\\ 0, & если\;\; v_n<0.\end{cases}$$

Учитывая условие периодичности функции c^* ,имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* m \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = \iiint_V \frac{m}{2} dv \int_0^T \frac{\partial c^{*2}}{\partial t} dt = 0,$$

поскольку

$$\int_0^T \frac{\partial c^{*2}}{\partial t} dt = 0. \qquad (3.7)$$

Таким образом, из (3.2) с учетом (3.3) – (3.7) получаем равенство

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* p dv = \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \iint_\Sigma c^{*2} v_n d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right)^2 dv \right] dt - \int_0^T dt \iint_\Sigma c^* (\alpha - \beta c^*) d\sigma .$$

Это равенство с учетом (3.6) представляется в виде

$$\int_0^T \frac{1}{2} dt \iint_\Sigma c^{*2} v_n^+ d\sigma + \int_0^T dt \iiint_V D_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right)^2 dv + \int_0^T dt \iint_\Sigma c^{*2} \beta d\sigma = \int_0^T dt \iiint_V c^* p dv +$$

$$+ \int_0^T dt \iint_\Sigma c^* \alpha^* d\sigma - \int_0^T dt \iint_\Sigma \frac{1}{2} c^{*2} v_n^- d\sigma , \qquad (3.8)$$

которое является основным равенством для сопряженной функции $c^*(x, t)$.

Допустив, что ретроспективная задача (2.11) – (2.13) и (3.1) имеет два решения $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$, построим функцию

$$\omega (x, t) = \varphi_1 - \varphi_2 , \qquad (3.9)$$

для которой имеет место ретроспективная задача

$$-m \frac{\partial \omega}{\partial t} - v_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (3.10)$$

$$l^* \omega = l \omega = 0, \qquad (3.11)$$

$$\omega(x,t)\big|_{t=T} = \omega(x,T) = 0. \qquad (3.12)$$

Запишем для однородной задачи (3.10) – (3.12) основное равенство, аналогичное равенству (3.8):

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2} \iint_\Sigma \omega^2 v_n^+ d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 dv + \iint_\Sigma \omega^2 \beta d\sigma \right] dt = 0. \qquad (3.13)$$

Понятно, что равенство (3.13) верно при всех $t \in (0, T)$, т.е. имеем

$$\frac{1}{2} \iint_\Sigma \omega^2 v_n^+ d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 dv + \iint_\Sigma \beta \omega^2 d\sigma = 0. \qquad (3.14)$$

Поскольку $v_n^+ > 0$, при $x \in \Sigma$, $D_i \geq 0$ при $x \in V$ и $\beta \geq 0$ при $x \in \Sigma$ для всех $t \in (0,T)$, то равенство (3.14) верно только при $\omega \equiv 0$, откуда следует, что $\varphi_1(x,t) \equiv \varphi_2(x, t)$, т.е. в области V при $t \in (0,T)$ существует единственное решение задачи (2.11) – (2.13) и (3.1).

4. Применение метода возмущения

Выше было отмечено, что конечная цель проблемы – идентификация коэффициентов математической модели с таким расчетом, чтобы она могла достоверно описать реальные физические процессы. Коэффициенты, характеризующие геохимические свойства среды, измеряются грубо и в очень малом количестве точек, т.е. практики дают довольно скудную информацию об объекте. Чтобы получить непрерывную (или достаточно богатую) информацию, мы вынуждены использовать математическую модель изучаемого явления. Для разрешения поставленной практикой проблемы мы применяем метод возмущения.

Допустим, что правая часть сопряженного уравнения принимает вариацию $p' = p+\delta p$, где $\delta p(x, t)$ – вариация функции
$p(x, t)$ в области V. Тогда сопряженная функция c^* также получит вариацию δc^*, т.е. имеет место равенство $c^{*\prime}=c^* +\delta c^*$ и относительно варьированной сопряженной функции получаем краевую задачу

$$\Lambda^* c^{*\prime} = p', \quad x\in V, \quad p'=p+\delta p, \quad c^{*\prime}=c^*+\delta c^*, \tag{4.1}$$

$$l^* c^{*\prime}=\alpha^{*\prime}, \quad x\in\Sigma, \quad \alpha^{*\prime}=\alpha+\delta\alpha^*, \quad t\in(0,T). \tag{4.2}$$

Здесь использованы обозначения

$$\Lambda^* = T^* + L^*, \qquad T^* = -m\frac{\partial}{\partial t}, \quad L^* = -v_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \tag{4.3}$$

$$\Lambda = T + L, \qquad T = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad L = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad i=1,2,3. \tag{4.4}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Lambda c = f(x,t), \quad x\in V, \quad t\in(0, T), \tag{4.5}$$

$$lc = \alpha(x, t), \quad x\in\Sigma, \quad t\in(0, T) \tag{4.6}$$

с начальными условием

$$c(x, t)|_{t=0} = c_0(x). \tag{4.7}$$

Из (4.1) – (4.6) образуем равенство

$$\iiint_V c\Lambda^* c^{*\prime} dv - \iiint_V c^*\Lambda c dv = \iiint_V cp' dv = \iiint_V c^* f dv, \tag{4.8}$$

или

$$\iiint_V c\Lambda^* c^* dv - \iiint_V c^*\Lambda c dv + \iiint_V c\Lambda^*\delta c^* dv = \iiint_V cp dv - \iiint_V c^* f dv + \iiint_V c\delta p dv, \tag{4.9}$$

откуда, учитывая (2.24), приходим к уравнению относительно вариации δc^*:

$$-\iiint_V cm\frac{\partial c^*}{\partial t}dv + \iiint_V\left[D_i q(c;\delta c^*) + \frac{\partial(v_i c)}{\partial x_i}\delta c^*\right]dv + \iint_\Sigma c(\beta - v_n)\delta c^* d\sigma =$$
$$= \iiint_V c\delta p\, dv + \iint_\Sigma c\delta\alpha^* d\sigma, \tag{4.10}$$

где

$$q(c;\delta c^*) = \frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial\delta c^*}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3, \tag{4.11}$$

– симметричная билинейная форма от функций c и δc^*.

Интегро-дифференциальное уравнение (4.10) относительно возмущения верно для всех $t\in(0,T)$. При разумно заданном конечном значении $\delta c^*(x, t)$ при $t = T$ его можно решить и найти δc^*. Проинтегрировав равенство (4.8) по t на отрезке $[0, T]$, с учетом равенства

$$\int_0^T\left(J_p[c] - J_f[c^*]\right)dt + \iiint_V\left[(cmc^*)_0 - (cmc^*)_T\right]dv +$$
$$+\int_0^T\left[\iint_\Sigma cc^* v_n d\sigma + + \iint_\Sigma(c\alpha^* - c^*\alpha)d\sigma\right]dt, \tag{4.12}$$

приходим к уравнению относительно вариации δc^*:

$$-\int_0^T dt \iiint_V cm\frac{\partial c^*}{\partial t}dv+\int_0^T dt\iiint_V\left[D_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial \delta c^*}{\partial x_i}+\frac{\partial(cv_i)}{\partial x_i}\delta c^*\right]dv+\int_0^T dt\iint_\Sigma c(\beta-v_n)\delta c^* d\sigma=$$

$$=\int_0^T\left[\iint_\Sigma c\delta\alpha^* d\sigma+\iiint_V c\delta\, pdv\right]dt. \qquad (4.13)$$

Ясно, что уравнение (4.13) можно получить из (4.10) интегрированием по t на отрезке [0, T] .

Таким образом, решая соответствующую ретроспективную задачу при известных значениях функций c, m, D, β, v_i, $\delta\alpha^*$ и δp в области $V_T = V \cup [0, T]$ и заданном условии

$$\delta c^*(x,t)|_{t=T} = \psi^*(x), \qquad (4.14)$$

можно вычислить (в принципе) функцию $\delta c^*(x, t)$ в области V_T .

Проблемой реализации этой задачи будем заниматься позже, а уравнение (4.10) используем для проверки правильности найденных значений поля вариации δc^* при любых $t\in(0, T)$.

5. Уравнения для вариаций коэффициента диффузии и пористости грунта

Допустим, что в уравнении переноса коэффициент диффузии D_i изменяется на δD_i , т.е. принимает вариацию $D_i'=D_i+\delta D_i$, $i=1,2,3$. Это равносильно тому, что оператор L из (4.4) принимает вариацию, равную δL и при прочих неизменных условиях сопряженный дифференциальный оператор также изменяется на δL^* .

Итак, при изменении оператора Λ^* на $\delta\Lambda^*$ получим варьированное дифференциальное уравнение

$$\Lambda^{*\prime} c^{*\prime} = p'', \quad p''=p'+\delta p'', \quad x\in V \qquad (5.1)$$

с краевым условием

$$l^{*\prime} c^{*\prime} = \alpha^{*\prime\prime},\ \alpha^{*\prime\prime} = \alpha^{*\prime}+\delta\alpha^{*\prime}, \quad x\in\Sigma, \qquad (5.2)$$

где $t\in(0,T)$,

$$\Lambda^{*\prime}=\Lambda^*+\delta\Lambda^*,\ D_i'=D_i+\delta D_i,\ \delta\Lambda^* = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \qquad (5.3)$$

$$l^{*\prime} = l^*+\delta l^*,\ \delta l^* = \delta D_i\frac{\partial}{\partial x_i} n_i+\delta\beta. \qquad (5.4)$$

Рассмотрим основную краевую задачу

$$\Lambda c = f(x,t),\ x\in V, \qquad (5.5)$$

$$lc = \alpha(x,t),\ x\in\Sigma,\ t\in(0,T)$$

и из (5.1) – (5.5) образуем равенство

$$\iiint_V c\Lambda^{*\prime} c^{*\prime} dv-\iiint_V c^*\Lambda c dv=\iiint_V cp'' dv-\iiint_V c^{*\prime} f dv\ , \qquad (5.6)$$

или

$$\iiint_V c\Lambda^* c^{*\prime} dv-\iiint_V c^*\Lambda c dv+\iiint_c c\delta\Lambda^* c^{*\prime} dv=\iiint_V cp' dv-\iiint_V c^{*\prime} f dv+\iiint_V c\delta\, p' dv. \qquad (5.7)$$

Преобразуя слагаемые из (5.7) и учитывая, что

$$\iiint_V c\Lambda^* c^{*\prime} dv-\iiint_V c^*\Lambda c dv=-\iiint_V\frac{\partial(cc^* m)}{\partial t}dv-\iint_\Sigma(c\alpha^{*\prime}-\alpha c^{*\prime})d\sigma-$$

$$-\iint_{\Sigma} cc^{*}{}'v_n d\sigma,$$

$$\iiint_V c\Lambda^{*}\ c^{*}{}'dv-\iiint_V c^{*}\Lambda cdv=\iiint_V cp'dv-\iiint_V c^{*}{}'fdv$$

и используя обозначения (2.19), приходим к равенству

$$J_{p'}[c]-J_f\left[c^{*}{}'\right]=-\iiint_V\frac{\partial(cc^{*}m)}{\partial t}dv-\iint_{\Sigma} cc^{*}{}'v_n d\sigma-\iint_{\Sigma}(c\alpha^{*}{}'-\alpha c^{*}{}')d\sigma. \qquad (5.8)$$

Таким образом, из (5.7) с учетом (5.8) мы получаем уравнение, содержащее вариации δD_i :

$$\iiint_V\left(\frac{\partial c}{\partial x_1}\frac{\partial c^{*}{}'}{\partial x_1}\delta D_1+\frac{\partial c}{\partial x_2}\frac{\partial c^{*}{}'}{\partial x_2}\delta D_2+\frac{\partial c}{\partial x_3}\frac{\partial c^{*}{}'}{\partial x_3}\delta D_3\right)dv=\iiint_V c\delta p'dv+$$
$$+\iint_{\Sigma} c(\delta\alpha^{*}{}'-c^{*}{}'\delta\beta)d\sigma, \qquad (5.9)$$

верное при всех $t\in(0,T)$.

Если влияние анизотропии действует только на главные члены $D_i(i=1,2,3)$, а их вариации не зависят от направлений, т.е. $\delta D(x)=\delta D_i$, то из (5.9) имеем уравнение относительно δD:

$$\iiint_V\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c^{*}{}'}{\partial x_i}\delta Ddv=\iiint_V c\delta p'dv+\iint_{\Sigma} c(\delta\alpha^{*}{}'-c^{*}\delta\beta)d\sigma. \qquad (5.10)$$

При известных c, $c^{*}{}'$,$\delta\beta$, $\delta\alpha^{*}{}'$ и $\delta p'$ из (5.10) можно вычислить вариацию δD в области V.

Наконец, пусть имеет место случай, когда при прочих равных условиях только пористость грунта m получает возмущение, т.е. $m'(x,t)=m+\delta m(x,t)$. Тогда оператор Λ, а тем самым и сопряженный оператор также получает вариацию.

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\tilde{\Lambda}^{*}{}'c^{*}{}'=\tilde{p}'',\quad \tilde{p}''=p'+\delta\tilde{p}',\quad x\in V,\quad t\in(0,T), \qquad (5.11)$$

$$l^{*}c^{*}{}'=\tilde{\alpha}^{*},\quad \tilde{\alpha}^{*}=\alpha^{*}+\delta\tilde{\alpha}^{*},\quad x\in\Sigma, \qquad (5.12)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^{*}{}'=\tilde{\Lambda}^{*}+\delta\tilde{\Lambda}^{*},\quad l^{*}=l,\quad \delta\tilde{\Lambda}^{*}=-\delta m\frac{\partial}{\partial t} \qquad (5.13)$$

и основную краевую задачу

$$\Lambda c=f,\quad lc=\alpha. \qquad (5.14)$$

Составим равенство

$$\iiint_V c\tilde{\Lambda}^{*}{}'c^{*}{}'\ dv-\iiint_V c^{*}{}'\Lambda c\ dv=\iiint_V\tilde{p}''cdv-\iiint_V fc^{*}{}'\ dv, \qquad (5.15)$$

или (выделяя главные части)

$$\iiint_V c\tilde{\Lambda}^{*}c^{*}{}'\ dv-\iiint_V c^{*}{}'\Lambda c\ dv+\iiint_V c\delta\tilde{\Lambda}^{*}c^{*}{}'\ dv=\iiint_V p'cdv-$$
$$-\iiint_V fc^{*}{}'\ dv+\iiint_V c\delta\tilde{p}'dv. \qquad (5.16)$$

Учитывая равенства

$$\iiint_V c\widetilde{\Lambda}^* c^{*\,\prime}\ dv - \iiint_V c^{*\,\prime} \Lambda c\ \ dv = -\iiint_V \frac{\partial (cc^{*\,\prime} m)}{\partial t} dv - \iint_\Sigma cc^{*\,\prime} v_n d\sigma -$$

$$-\iint_\Sigma (c\alpha^{*\,\prime} - \alpha c^{*\,\prime}) d\sigma = J_{p'}[c] - J_f[c^{*\,\prime}]$$

и $$\iiint_V c\delta \Lambda^* c^{*\,\prime}\, dv = -\iiint_V c\frac{\partial c^{*\,\prime}}{\partial t} \delta m dv,$$

из (5.16) получаем уравнение относительно $\delta m(x, t)$:

$$\iiint_V c\frac{\partial c^{*\,\prime}}{\partial t} \delta m dv = -\iiint_V c\delta\ \tilde{p}'\, dv\ , \qquad (5.17)$$

верное при всех $t \in (0,T)$, откуда, после интегрирования по t имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c\frac{\partial c^{*\,\prime}}{\partial t} \delta m dv = -\int_0^T dt \iiint_V c\delta\ \tilde{p}'\, dv\ . \qquad (5.18)$$

Уравнение (5.17) или (5.18) при известных c, $c^{*\,\prime}$ и $\delta\,\tilde{p}'$ дает возможность вычислить функцию $\delta m(x, t)$.

Из приведенных алгоритмов видно, что с привлечением теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений нами получен ряд интегральных и интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций c, c^*, δc^* и вариации коэффициентов δD_i и δm , что существенно обогащает информацию, необходимую для идентификации коэффициентов $D_i(x)$ и $m(x,t)$. При наличии начальных условий они дают возможность вычислить их в области V. Кроме того, мы имеем конкретные уравнения, пригодные для уточнения каждого из параметров. Таким образом, мы уже подготовлены к изложению приближенных алгоритмов, идентифицирующих гидро- и геохимические параметры среды. Для получения сравнительно экономичных и удобных для реализации на ЭВМ алгоритмов будем использовать метод конечных элементов (МКЭ).

ЛИТЕРАТУРА

1.Гавич И.К. Теория и практика моделирования в гидрогеологии. - М.: Недра, 1980.- 385 с.

2.Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения./ Под.ред. И.К. Гавич.– М.: Недра, 1985.–320с.

3.Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.–М.: Наука, 1969.–545с.

4.Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. -Фрунзе: Илим , 1982.-280 с.

5.Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. -Фрунзе: Илим, 1989.-183 с.

6.Мурзакматов М.У., Исабеков К.А, Джаныбеков Б.С. Нестационарное пространственное течение подземных вод.// Вестник ИГУ, №5, 2002.– с.152–158.

7.Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды методом теории возмущений. // Вестник ИГУ, №7, 2002. –с.24–34.

8.Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Идентификация гидрогеологических параметров среды в нестационарных течениях подземных вод. // Вестник ИГУ, №7, 2002. –с.72–84.