

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КВАДРАТИЧНЫМИ БАЗИСАМИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Рассматриваются два алгоритма приближенного решения уравнения напорной фильтрации, основанные на квадратичных базисных функциях метода конечных элементов (МКЭ) и результаты решения тестовых примеров сравниваются с аналогичными результатами при линейных базисах.

В МКЭ в качестве базисных, наряду с линейными, могут применяться и нелинейные функции [1,2,3]. Практика показывает, что при удачном подборе базисных функций можно существенно повысить точность приближенного решения [4].

В данной работе мы рассмотрим применение МКЭ с квадратичными базисами для приближенного решения задачи напорной фильтрации подземных вод:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = \beta H + \alpha, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial D, \quad (2)$$

где  $H=H(x,y)$  – напорная функция;  $T=T(x,y)$  – водопроницаемость пласта;  $Q=Q(x,y)$  – функция, учитывающая перетоки из ниже – и вышележащих пластов;  $f=f(x,y)$  – функция источников и стоков;  $\alpha=\alpha(x,y)$ ,  $\beta=\beta(x,y)$  – заданные функции;  $\partial/\partial n$  – производная по нормали к границе области;  $D$  – область фильтрации в плане,  $\Gamma=\partial D$  – ее граница.

Для приближенного решения задачи (1), (2) область  $D$  разбиваем на треугольные элементы и функцию  $H(x,y)$  ищем в виде

$$H(x, y) \approx H_n(x, y) = \sum_{i=1}^n H_i N_i(x, y). \quad (3)$$

Здесь  $H_i=H(x_i, y_i)$ ,  $N_i(x, y)$  – базисные функции,  $n$  – количество узлов области  $D$ , где определяются значения искомой функции.

Мы рассмотрим два алгоритма, основанные на квадратичных базисных функциях.

**Алгоритм 1 [1].** При использовании квадратичных интерполяционных полиномов каждый треугольный элемент ( $e$ ) содержит 6 узлов (рис.1) и искомая функция в нем представляется в виде

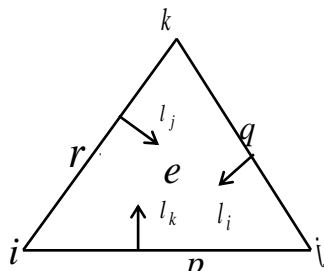


Рис.1.

$$H^{(e)} = \sum_{s=1}^6 H_s N_s(x, y), \quad (4)$$

где  $N_1 = l_i(2l_i - 1)$ ,  $N_2 = 4l_i l_j$ ,  $N_3 = l_j(2l_j - 1)$ ,  
 $N_4 = 4l_j l_k$ ,  $N_5 = l_k(2l_k - 1)$ ,  $N_6 = 4l_i l_k$ ;

$$l_s = \frac{1}{\Delta_e} (a_s + b_s x + c_s y), \quad s = i, j, k,$$

$l_i + l_j + l_k = 1$ ;  $l_s$  – так называемые

–координаты, представляющие отношения площадей элементарных треугольников;

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

Подставляя в задаче (1), (2) вместо  $H(x,y)$  функцию  $H_n(x,y)$  из (3), по обобщенному принципу Галеркина получаем систему уравнений

$$\iint_D N_i \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) + QH_n - f \right] dx dy + \int_{\Gamma} N_i \left( T \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) ds = 0, \\ i=1,2,\dots,n..$$

После использования формулы Грина в двойном интеграле и разложения (3) функции  $H_n$  приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (5)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D Q N_i N_j dx dy - \int_{\Gamma} \beta N_i N_j ds, \quad (6) \\ b_i = \iint_D f N_i dx dy + \int_{\Gamma} \alpha N_i ds.$$

Для нахождения коэффициентов и правых частей системы (7) приходится вычислять определенные интегралы от функций, зависящих от  $l$ -координат. Удобнее в качестве переменных интегрирования использовать именно эти координаты. Поэтому необходимо рассмотреть формулы преобразования координат. Декартовы и  $l$ -координаты связаны соотношениями [1]

$$x = l_i x_i + l_j x_j + l_k x_k, \\ y = l_i y_i + l_j y_j + l_k y_k, \\ l = l_i + l_j + l_k,$$

где  $(x_s, y_s)$  ( $s=i,j,k$ )– координаты вершин элементов. Исключая из третьего уравнения  $l_k$ , т.е. считая  $l_i$  и  $l_j$  независимыми координатами, имеем

$$x = (x_i - x_k) l_i + (x_j - x_k) l_j + x_k, \\ y = (y_i - y_k) l_i + (y_j - y_k) l_j + y_k.$$

Якобиан преобразования будет равен

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial l_i} & \frac{\partial x}{\partial l_j} \\ \frac{\partial y}{\partial l_i} & \frac{\partial y}{\partial l_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{pmatrix}, \quad \det J = \Delta_e,$$

тогда

$$J^{-1} = \frac{1}{\Delta_e} \begin{pmatrix} y_j - y_k & -(y_i - y_k) \\ -(x_j - x_k) & x_i - x_k \end{pmatrix}.$$

При этом производные базисных функций преобразуются по формулам [2]

$$\frac{\partial N_s}{\partial x} = \frac{1}{\Delta_e} \left[ \frac{\partial N_s}{\partial l_i} (y_j - y_k) - \frac{\partial N_s}{\partial l_j} (y_i - y_k) \right], \\ \frac{\partial N_s}{\partial y} = \frac{1}{\Delta_e} \left[ -\frac{\partial N_s}{\partial l_i} (x_j - x_k) + \frac{\partial N_s}{\partial l_j} (x_i - x_k) \right], \quad (7) \\ s = 1, 2, \dots, 6,$$

а интегралы из (6) по треугольным элементам – по формулам

$$\iint_e F(x, y) dx dy = \int_0^{1-l_j} \int_0^{1-l_j-l_k} \varphi(l_i, l_j, l_k) |\det J| dl_i dl_j. \quad (8)$$

Интеграл в правой части (8) вычисляется с помощью квадратурной формулы [1]

$$\int_0^{1-l_j} \int_0^{1-l_j-l_k} \varphi(l_i, l_j, l_k) |\det J| dl_i dl_j = \sum_{r=1}^m W_r g_r(l_i, l_j, l_k),$$

где

$$g(l_i, l_j, l_k) = |\det J| \varphi(l_i, l_j, l_k),$$

$W_r$  – весовые коэффициенты,

$m$  – число точек интегрирования, которое зависит от порядка интерполирования.

Порядок интерполирования и весовые коэффициенты определяются суммой показателей степеней координат  $l_i, l_j, l_k$  в каждом члене.

В формулах (6) встречаются три вида подынтегральных функций, поэтому рассмотрим три случая.

$$\text{Случай 1}^0. \quad F(x, y) = T(x, y) \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right).$$

Используя формулы (7), получаем

$$g(l_i, l_j, l_k) = \frac{1}{\Delta_e} T(l_i, l_j, l_k) \left\{ l_{jk}^2 \frac{\partial N_i}{\partial l_i} \frac{\partial N_j}{\partial l_i} + l_{ik}^2 \frac{\partial N_i}{\partial l_j} \frac{\partial N_j}{\partial l_j} - [(x_i - x_k)(x_j - x_k) + (y_i - x_k)(y_j - y_k)] \left( \frac{\partial N_i}{\partial l_i} \frac{\partial N_j}{\partial l_j} + \frac{\partial N_i}{\partial l_j} \frac{\partial N_j}{\partial l_i} \right) \right\}, \quad (10)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, 6,$$

где  $l_{jk}$  и  $l_{ik}$  – длины сторон  $jk$  и  $ik$  соответственно.

В данном случае сумма показателей степеней координат  $l_i, l_j$  и  $l_k$  равна двум, поэтому при интегрировании можно ограничиться схемой второго порядка точности. Координаты точек интегрирования равны:

$$1) \quad l_i = l_k = \frac{1}{2}, \quad l_j = 0; \quad 2) \quad l_i = l_j = \frac{1}{2}, \quad l_k = 0; \quad 3) \quad l_j = l_k = \frac{1}{2}, \quad l_i = 0$$

и каждая точка интегрирования имеет весовой коэффициент  $W_i = \frac{1}{6}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Поэтому

$$\int_0^{1-l_j} \int_0^{1-l_j-l_k} \varphi(l_i, l_j, l_k) |\det J| dl_i dl_j = \frac{|\Delta_e|}{6} \left[ g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + g\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + g\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (11)$$

$$\text{Случай 2}^0. \quad F(x, y) = Q(x, y) N_j(x, y) N_i(x, y).$$

Тогда

$$g(l_i, l_j, l_k) = Q(l_i, l_j, l_k) N_j(l_i, l_j, l_k) N_i(l_i, l_j, l_k) |\det J| = |\Delta_e| l_i (2l_i - 1) l_j (2l_j - 1) Q(l_i, l_j, l_k).$$

В этом случае также следует использовать схему второго порядка точности

$$\int_0^{1-l_j} \int_0^{1-l_j-l_k} \varphi(l_i, l_j, l_k) |\det J| dl_i dl_j = \frac{|\Delta_e|}{6} \left[ g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + g\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + g\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (12)$$

$$\text{Случай 3}^0. \quad F(x, y) = f(x, y) N_i(x, y).$$

Поэтому

$$g(l_i, l_j, l_k) = f(l_i, l_j, l_k) N_i(l_i, l_j, l_k) |\det J| = |\Delta_e| l_i (2l_i - 1) f(l_i, l_j, l_k).$$

В этом случае также используется схема интегрирования второго порядка точности, где интегрирование ведется по одной точке с координатами  $l_i = l_j = l_k = \frac{1}{3}$  и с весовым коэффициентом  $W = \frac{1}{2}$ , поэтому

$$\int_0^1 \int_0^{1-l_j} \varphi(l_i, l_j, l_3) |\det J| dl_i dl_j = \frac{|\Delta_e|}{2} g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{|\Delta_e|}{18} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (13)$$

Контурные интегралы в (6) вычисляются по формуле Симпсона.

**Алгоритм 2.** Суть этого алгоритма состоит в том, что вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$-T_0 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = f_0$$

и его частные решения

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2$$

используем в качестве базисных функций для решения задачи (1), (2).

Образуем функции формы по формулам

$$N_i(x, y) = a_i + b_i H_1(x) + c_i H_2(y),$$

$$N_j(x, y) = a_j + b_j H_1(x) + c_j H_2(y),$$

$$N_k(x, y) = a_k + b_k H_1(x) + c_k H_2(y)$$

и искомую функцию  $H(x, y)$  в области  $D$  представим в виде разложения (3). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции  $N_i$ ,  $N_j$ , и  $N_k$  играют роль функций формы в классическом МКЭ. Применяя принцип Галеркина к задаче (1), (2), получаем СЛАУ (5) с коэффициентами (6). В данном случае, в отличие линейных функций формы и алгоритма 1, к вычислению интегралов (6) привлечение известных квадратурных формул [1] невозможно.

Работа алгоритмов отлажена на решении ряда тестовых примеров. Приведем здесь три из них.

**Пример 1.** В круге  $x^2 + y^2 \leq 0.25$  решается задача (1), (2) с линейными и квадратичными базисами при следующих данных:  $T(x, y) = 1$ ,  $Q(x, y) = 0$ ,  $f(x, y) = -4$ . Искомой функцией является  $H(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ . Круг разделен на 6 равных частей, так что элементами являются равносторонние треугольники со стороной, равной, 0.5 (т.е. шаг сетки  $h = 0.5$ ). В табл.1 приведены точные и приближенные значения искомой функции в узлах одного элемента (рис.1), при этом узел  $i$  расположен в центре круга, а узлы  $j$  и  $k$  – на окружности. Относительно невысокая точность результатов объясняется величиной шага сетки и тем, что узел  $q$  лежит не на самой границе, а на хорде, соединяющей граничные узлы  $j$  и  $k$ .

### Результаты применения линейных и квадратичных базисов

Таблица 1

Узлы сетки	$i$	$p$	$j$	$q$	$k$	$r$	
Точное решение	1.000	1.062	1.250	1.187	1.250	1.062	
Приблизж. решения	Лин. базисы	0.833	0.901	1.083	1.104	1.083	0.901
	Алгоритм 1.	0.872	0.936	1.128	1.060	1.128	0.936
	Алгоритм 2.	0.933	0.994	1.183	1.119	1.183	0.994

**Пример 2.** Область  $D$  представляет собой квадрат  $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , который путем проведения диагоналей последовательно разбивается на 2, 4, 8, 16, 32, 64 элемента. Следовательно, шаг сетки уменьшается от  $2\sqrt{2}$  до 0.5. В каждом из шести случаев задача (1), (2) решается МКЭ с линейными и квадратичными базисами при следующих данных:  $H(x,y)=2(x^2+y^2)+1$ ,  $T(x,y)=1$ ,  $Q(x,y)=0$ ,  $f(x,y)=-8$ . Результаты счета приведены в табл.2. Поскольку искомая функция и область  $D$  обладают центральной и осевой симметрией, в таблице даны результаты, относящиеся к первой четверти координатной плоскости.

**Пример 3.** Задача (1), (2) решается с данными примера 2 в круге с единичным радиусом ( $x^2+y^2 \leq 1$ ), который последовательно разбивается на 6, 24 и 96 элементов. В первом случае круг разбивается на 6 равных частей. Элементами являются равносторонние треугольники со сторонами, равными 1 (т.е. шаг сетки  $h=1$ ). Во втором случае проводится окружность радиуса  $r=0.5$ . Внутренний круг состоит из 6 равносторонних треугольников (сторона равна 0.5), а круговой пояс разбивается на 18 элементов. В третьем случае проводятся еще две концентрические окружности с радиусами  $r=0.25$  и  $r=0.75$ . Внутренний (малый) круг разбивается на 6 треугольников, а три круговые пояса разбиваются соответственно на 18, 30 и 42 треугольников. В табл. 3 приведены результаты, относящиеся к первому квадранту.

В рассмотренных примерах задача (1), (2) решается при постоянных коэффициентах  $T$ ,  $Q$ ,  $f$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Это сделано для выяснения влияния базисных функций на точность приближенного решения, так как в таких случаях погрешность осреднения значений указанных функций по элементу отсутствует. В реальных условиях область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, в пределах каждого из которых значения гидрогеологических параметров можно считать постоянными. Именно в таких условиях заметно преимущество алгоритма 2 перед линейными базисами, это особенно заметно в примере 1. При уменьшении размеров элементов, как видно из примера 2, результаты применения линейных и квадратичных базисов нивелируются, а интересы дела, наоборот, требуют применения в гидрогеологических расчетах крупных фрагментов.

Квадратичные базисы в алгоритме 2 дают более точные результаты в примере 3. Это объясняется тем, что в этом примере элементами являются равносторонние треугольники, а в примере 2 – прямоугольные.

Алгоритм 1 в случае крупной сетки в смысле точности решения занимает среднее положение между другими алгоритмами, а при измельчении сетки теряет преимущество в точности перед линейными базисами (это, по-видимому, связано с увеличением погрешности округления в вычислениях). С точки зрения практического применения этот алгоритм явно проигрывает другим, поскольку он требует вдвое больше информации, а размерность матрицы СЛАУ (5) увеличивается четыре раза. Алгоритм 2 требует для своей работы минимальное количество информации, т.е. столько, сколько для линейных базисов и в сочетании с методом фрагментов является наиболее предпочтительным перед другими алгоритмами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979. –392 с.
2. Джаныбеков Ч. Дж. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. –Фрунзе: Илим, 1989. –184 с.
3. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж., Исабеков К.А. Приближенные решение задач фильтрации подземных вод с использованием фрагментности области. // Вестник ИГУ, №4, Каракол, 2000. с. 104–108.
4. Джаманбаев М.Д. методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. –Бишкек: Илим, 1996. –122 с.