УДК 532.546

Мурзакматов М.У., Рысмендеева А.Р.

ЫГУ им К.Тыныстанова

ЗАДАЧА О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в - твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания.

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x=\xi(x)$. За время t, $t+\Delta t$ граница $x=\xi$ переместится от точки $\xi=x_1$ до точки $\xi=x_2$ до точки $\xi=x_2=x_2+\Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплавляется, если $\Delta\xi<0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через границы $\xi=x_1$ и $\xi=x_2$ т. е. должно выполняться условие

$$\left[k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2}\right]\Delta t=\lambda\rho\Delta\xi.$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а λ— скрытая теплота плавления.

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, мы и получим дополнительное условие на границе раздела в следующем виде:

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}-k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}=\lambda\rho\frac{d\xi}{dt}$$

Это условие имеет место как для процесса затвердевания (когда $\Delta\xi>0$ и $\frac{d\xi}{dt}>0$), так и для процесса плавления (когда $\Delta\xi>0$ и $\frac{d\xi}{dt}>0$); направление процесса определяется знаком левой части.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x\geq 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x=0$. В начальный момент $t=0$ вода обладает постоянной температурой $c>0$. Если на поверхности $x=0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1<C<0$, то граница замерзания $x=\xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\qquad \text{для}\qquad 0<x<\xi,\\&\frac{\partial u_2}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\qquad \text{для}\qquad 0<x<\infty\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \quad \textit{при} \quad x = 0, \\ u_2 &= c \quad \textit{при} \quad t = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \textit{при} \quad x = \xi, \qquad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt} \qquad (4)$$

где k_1, a_1^2 и k_2, a_2^2 – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз. Задачу (1) – (4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

После вычисления значений функции $U(x,t)$ на временном слое $t_к$ положение точки $\xi_к = \xi(t_к)$ можно приближенно определить из условия

$$\lambda\rho \frac{d\xi}{dt} = k_1 \frac{\partial u}{\partial t} - k_2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x = \xi_k, \quad t = t_k \qquad (5)$$

$U_i>0$ $\quad$ $U=0$ $\quad$ $U_{i+1}<0$

X_i $\quad$ ξ $\quad$ x_{i+1} $\quad$ x

Производные в условии (5) заменяем разностными отношениями

$$\lambda\rho \frac{\xi - \bar{\xi}}{\Delta t} = k_1 \frac{u_\xi - u_i}{\xi - x_i} - k_2 \frac{u_{i+1} - u_\xi}{x_{i+1} - \xi},$$

$$\textit{где} \quad \bar{\xi} = \xi(t_{k-1}), \quad u_\xi = u(\xi, t_k) \qquad (6)$$

Принимая во внимание, что $U_\xi=0$, из равенства (6) имеем:

$$\xi = \bar{\xi} - \frac{\Delta t}{\lambda\rho}\left(\frac{k_1 u_1}{\xi - x_i} + \frac{k_2 u_{i+1}}{x_{i+1} - \xi}\right), \qquad (7)$$

Уравнение (7) решаем итерацией. Положив в начальном приближении $\xi^{(0)} = (x_i + x_{i+1})/2$ строим итерационный процесс по формуле

$$\xi^{(\nu)} = \bar{\xi} - \frac{\Delta t}{\lambda\rho}\left(\frac{k_1 u_i}{\xi^{(\gamma-1)} - x_i} + \frac{k_2 u_{i+1}}{x_{i+1} - \xi^{(\gamma-1)}}\right)$$

$$U(x,t) = (t - x - 0.1)(2x/20 + 1),$$

$$0 \le x \le 20, 0 < t \le 10$$

$$t - x - 0.1 = 0$$

$$x = t - 0.1$$

Точные значения ξ, в которых $U(\xi_k, t_k)$

t_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0.9	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9
ξ_k	0.871	1.876	2.878	3.880	4.807	5.763	6.745	7.712	8.704	9.683

Литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.

2. Годунов С.Н. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1971.

3. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. -М., 1973.

4. Араманович И.Г., Левин В.М. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1964.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. «Наука», -М., 1971.

6. Мисюркеев И.В. Сборник зада по методам математической физики. -М.: Просвещение, 1975.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1985.