

О КОМБИНИРОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ ДВУХКРИВОШИПНО - КОРОМЫСЛОВОГО МЕХАНИЗМА ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ.

Представлен анализ кинематической схемы шарнирно-четырёхзвенного механизма переменной структуры. Обоснованы возможности определения скорости и ускорения через углы наклона шарниров.

Известно, что механизм можно образовать присоединением отдельных звеньев и кинематических пар к ведущему звену. В итоге можно получить различные механизмы с соответствующим данным движением исполнительного органа.

Рассмотрим это на примере нижеследующего механизма. Для получения рассматриваемого механизма в качестве базового взят шарнирно-четырёхзвенный механизм (рис.1).

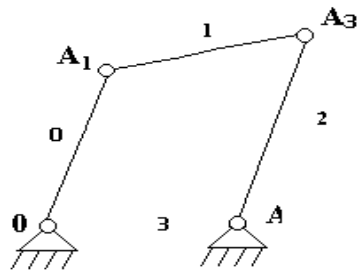


Рис.1. Кинематическая схема шарнирно-четырёхзвенного механизма.

Дополнительным введением на этот механизм, представленный на рис.1 отдельных звеньев, соблюдая определенное соотношение длин звеньев, получили двухкривошипно - коромысловый механизм переменной структуры (рис.2).

Двухкривошипно-коромысловый механизм переменной структуры представляет собой плоский шестизвенный механизм, состоящий из неподвижного звена-стойки $l_0=l_3+h_3$, и пяти подвижных звеньев: кривошипа l_0 , шатуна l_1 , вторичного кривошипа l_2 , вторичного шатуна h_1 и коромысла h_2 .

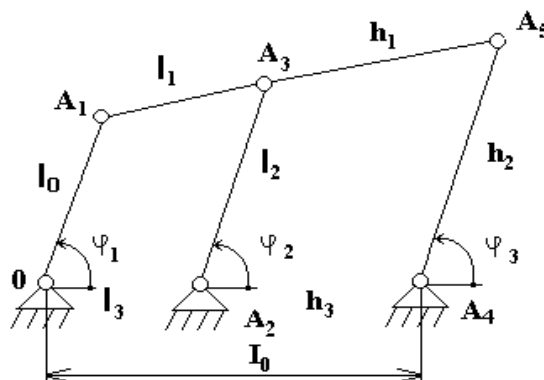


Рис.2. Расчетная схема двухкривошипно - коромыслового механизма переменной структуры.

Для четырехзвенника $OA_1A_3A_2$ известен закон движения ведомого звена A_2A_3 [1]

$$\varphi_2 = \arccos \frac{m \pm \kappa \sqrt{1 + \kappa^2 - m^2}}{1 + \kappa^2}, \quad (1)$$

$$\text{где } m = \frac{L_1^2 - L_2^2 - L_3^2 - 1 + 2L_3 \cos \varphi_1}{2L_2(L_3 - \cos \varphi_1)}, \quad \kappa = \frac{\sin \varphi_1}{L_3 - \cos \varphi_1},$$

$$L_1 = l_1/l_0, \quad L_2 = l_2/l_0, \quad L_3 = l_3/l_0,$$

Известны также скорость и ускорение звена A_2A_3 :

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \frac{\frac{l_3}{l_2} \sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin \varphi_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = \dot{\varphi}_1 \Phi_1, \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 \Phi_1 + \frac{\frac{l_3}{l_2} \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - L_3 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_2 + \left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \right)^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L_3 \sin \varphi_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

Зная зависимость $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, заданную в явном виде, и предполагая теперь A_2A_3 ведущим звеном, можно найти закон зависимости φ_3 от угла φ_2 .

Для этого рассмотрим четырехзвенник $A_2A_3A_5A_4$ и применим к нему уже известные формулы (1)-(3)

Тогда

$$\varphi_3 = \arccos \frac{m_1 \pm \kappa_1 \sqrt{1 + \kappa_1^2 - m_1^2}}{1 + \kappa_1^2}, \quad (4)$$

где

$$m_1 = \frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 - 1 + 2H_3 \cos \varphi_2}{2H_2(H_3 - \cos \varphi_2)}, \quad \kappa_1 = \frac{\sin \varphi_2}{H_3 - \cos \varphi_2},$$

$$H_1 = h_1/l_2, \quad H_2 = h_2/l_2, \quad H_3 = h_3/l_2,$$

Получаем зависимость вида $\varphi_3 = g(\varphi_2)$, поскольку $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ согласно формуле (1), то $\varphi_3 = g(\varphi_2) = g(f(\varphi_1)) = F(\varphi_1)$, где $F = g \circ f$ - суперпозиция функций f и g .

Другими словами, подставляя вместо φ_2 его выражение через φ_1 , в формуле (4) получаем выражение φ_3 через φ_1 в явном виде.

Остановимся теперь на определении скорости $\dot{\varphi}_3$ и ускорения $\ddot{\varphi}_3$ ведомого звена A_4A_5 . Скорость и ускорение ведущего звена A_2A_3 уже известны из формул (2) и (3).

Для скорости и ускорения звена A_4A_5 получаем аналогичные же формулы:

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 \frac{\frac{h_3}{h_2} \sin \varphi_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{H_3 \sin \varphi_3 + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} = \dot{\varphi}_2 \cdot \Phi_2, \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_2 \cdot \Phi_2 + \frac{\frac{h_3}{h_2} \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 - H_3 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_3 + \left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3 \right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{H_3 \sin \varphi_3 + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad (6)$$

Зная $\dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2, \varphi_3$, из формул (1), (2) и (4), мы по формуле (5) имеем возможность определения $\dot{\varphi}_3$. Знание $\dot{\varphi}_3$ и φ_2 из (3) дает возможность найти $\ddot{\varphi}_3$.

Формулы (4), (5) и (6) дают нам законы изменения положения, скорости и ускорения ведомого звена A_4A_5 в зависимости от φ_1 .

Таким образом, мы обосновали принципиальную возможность определения

$\dot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_3, \varphi_3$ через φ_1 . Но для практических расчетов полученные аналитические формулы (1)-(6) неудобны ввиду их громоздкости. В настоящей статье мы предлагаем сочетание

аналитических и приближенных методов, основанных на конечно - разностной аппроксимации функций и их производных.

Предположим, что ведущее звено OA_1 вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi/T$, где $T = \text{const} > 0$ - период вращения.

Отрезок $[0, T]$ разобьем на N равных частей точками деления $t_i = ih$, где $h = T/N$, $i = 0, 1, \dots, N$

Обозначим через φ_1^i значение функции $\varphi_1 = \omega t$ в точке t_i : $\varphi_1^i = \omega hi$

Для расчета φ_2^i нами предлагается формула (4) можно представить в виде:

$$\varphi_2^i = \arccos \frac{m \pm \kappa \sqrt{1 + \kappa^2 - m^2}}{1 + \kappa^2}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (7)$$

где
$$m = \frac{L_1^2 - L_2^2 - L_3^2 - 1 + 2L_3 \cos(\omega hi)}{2L_2(L_3 - \cos(\omega hi))}, \quad \kappa = \frac{\sin(\omega hi)}{L_3 - \cos(\omega hi)}$$

Зная φ_2^i при всех значениях $i = 0, 1, \dots, N$

находим φ_3^i :

$$\varphi_3^i = \arccos \frac{m_1 \pm \kappa_1 \sqrt{1 + \kappa_1^2 - m_1^2}}{1 + \kappa_1^2}, \quad 0 \leq i \leq N,$$

где
$$m_1 = \frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 - 1 + 2H_3 \cos(\varphi_2^i)}{2H_2(H_3 - \cos \varphi_2^i)}, \quad \kappa_1 = \frac{\sin \varphi_2^i}{H_3 - \cos \varphi_2^i}$$

Производную $\dot{\varphi}_3$ будем аппроксимировать конечно-разностным отношением

$$\frac{\varphi_3^{i+1} - \varphi_3^i}{h} \approx \dot{\varphi}_3 \quad (9)$$

Как известно, из теории разностных схем [2, 3], такая замена приводит к ошибке порядка $O(h)$. За счет измельчения шага h , т.е. увеличения N , эту ошибку можно сколько угодно уменьшать: $O(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Следовательно, для приближенного вычисления $\dot{\varphi}_3$ нам нет необходимости обращаться к точной аналитической формуле (5), вместо этого достаточно знать значения $\varphi_3^0, \varphi_3^1, \dots, \varphi_3^N$,

известные уже из (8). Обозначим $\varphi_3^{-i} = \frac{\varphi_3^{i+1} - \varphi_3^i}{h}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$

Тогда числа $\bar{\varphi}_3^0, \bar{\varphi}_3^1, \dots, \bar{\varphi}_3^{N-1}$, будут давать приближенные значения $\dot{\varphi}_3$ в точках $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1$

Осталось найти $\bar{\varphi}_3^N$. Докажем, что $\bar{\varphi}_3^N = \bar{\varphi}_3^0$

В силу периодичности функции $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(T) = 0$

Отсюда, согласно формулам (1) и (4), вытекают равенства $\varphi_2(0) = \varphi_2(T)$ и $\varphi_3(0) = \varphi_3(T)$

Из формулы (2) имеем также $\dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_2(T)$. Окончательно, из формулы (5) получаем, что

$\dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_2(T)$. Следовательно, $\bar{\varphi}_3^N = \bar{\varphi}_3^0$. Для вычисления $\ddot{\varphi}_3$ предложим разностное отношение

$$\frac{\varphi_3^{i-1} - 2\varphi_3^i + \varphi_3^{i+1}}{h^2} \approx \ddot{\varphi}_3, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (10)$$

Погрешность такой замены составляет бесконечно малую величину порядка $O(h^2)$. Для приближенного вычисления

φ_3 в точках t_i опять же достаточно знать $\varphi_3^0, \varphi_3^1, \dots, \varphi_3^N$

Обозначим

$\tilde{\varphi}_3^i = \frac{\varphi^{i-1} - 2\varphi_3^i + \varphi_3^{i+1}}{h^2}$, числа $\tilde{\varphi}_3^1, \tilde{\varphi}_3^2, \dots, \tilde{\varphi}_3^{N-1}$ являются приближенными

значениями $\ddot{\varphi}_3$ в точках $t = ih, i = 1, 2, \dots, N-1$

Теперь нужно еще определить значение $\tilde{\varphi}_3^0$ и $\tilde{\varphi}_3^N$ эти значения находятся из аналитической формулы (6). Таким образом, полученные результаты могут быть использованы для теоретического исследования при проектировании двухкривошипно-коромыслового механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Озол О.Г. Теория механизмов и машин. -М.: Наука, 1984.
2. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. -М.: Наука, 1973.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1989.