УДК 518.6

Н.А.Абиев

АЛГОРИТМ РАСЧЕТОВ ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИЧЕСКОГО ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Работа посвящена решению обратной задачи гидрооптики в нестационарной постановке прямым моделированием на ЭВМ физического процесса переноса частиц сквозь водную среду, а именно - определению коэффициента рассеяния водной среды на основе измеренных приборами данных об интенсивности отраженного средой узкого пучка лазерного излучения. В статье разработан алгоритм решения задачи восстановления коэффициента рассеяния водной среды на ЭВМ.

Рассматриваемая в предлагаемой работе задача относится к задачам лидарной океанографии и тесно связана с экологическими проблемами морей, озер и водоемов. На основе оценки величины отклонения оптических параметров водной среды от принятых стандартных величин возможно сделать вполне приемлемые выводы о степени загрязненности среды и о химическом составе ее загрязнителей, составляющих их примесей, солей и соединений.

Работу по определению оптических характеристик водной среды можно было бы проводить «вручную» – опуская измерительные зонты в разные глубины, на разных участках предполагаемой акватории, в разные времена года и т.д. Можно также изучать водную среду дистанционным способом - со спутников, летательных аппаратов. Но, как известно, любой такой эксперимент сопряжен с финансовыми затратами и ограниченностью количества экспериментов.

С развитием вычислительной техники особую актуальность и привлекательность приобретают компьютерные методы моделирования физических явлений, имея в распоряжении только точную и адекватную математическую модель рассматриваемого процесса. Варьируя на ЭВМ параметры физического процесса, за короткое время можно поставить множество численных экспериментов, причем без каких бы то ни было расходов.

Математическая постановка рассматриваемой задачи дана в работе [10], где объектом исследования является плоский, детерминированный слой водной среды. Среда предполагается горизонтально однородной, а по вертикали - разбитой на заданное количество тонких слоев с постоянными значениями коэффициентов рассеяния и поглощения внутри них. Над поверхностью водной среды размещены точечные источник и приемник излучений. От источника изотропно внутри кругового конического угла распространяется узкий световой луч постоянной длины волны. Плотность распределения испускаемых источником квантов света задается известной функцией. С момента испускания квантов света в течении заданного отрезка времени зондирования происходит возвращение некоторых квантов света из водной среды обратно в приемник излучений, совмещенный с источником.

Методика исследований состоит в том, что мы рассматриваем временное распределение интенсивности поступающего в приемник излучения на разбиениях заданного отрезка времени зондирования. Далее решается задача: зная измеренные значения интенсивности в различных интервалах времени зондирования, найти значение коэффициента рассеяния среды в слоях при известном и фиксированном значении коэффициента поглощения. Эта задача после линеаризации системы уравнений $I_1(\sigma_1,...,\sigma_n) = I_1^*,\dots,\ \ I_m(\sigma_1,...,\sigma_n) = I_m^*$,

где I_k^*- значение интенсивности излучения, измеренное в процессе зондирования за промежуток времени $[t_{k-1}, t_k]$, $t_k = kT/m$, $k = 0,...,m$, $T-$продолжительность времени зондирования, $\sigma_i = \sigma_{s_i} + \sigma_{a_i}$, σ_{s_i}, σ_{a_i} - соответственно коэффициенты полного ослабления, рассеяния и поглощения излучения на i-ом слое, $i = 1,...,n$, приводится к системе линейных уравнений, матрица которой состоит из элементов, зависящих от производной интенсивности по коэффициенту рассеяния. Свободный вектор правых частей этой системы содержит значение самой интенсивности. Полученную систему можно решать итерационными методами, но при этом на каждой итерации возникает необходимость знания значений интенсивности и ее производной. Оценку этих значений можно провести различными методами. Но в случае данной задачи наиболее эффективным считается метод Монте-Карло, развитый в основополагающих работах [1-8], поскольку отличительной особенностью методов Монте-Карло является то, что физический процесс переноса частиц света моделируется и имитируется на ЭВМ в точном соответствии с законами их движения (угол рассеяния фотона от столкновений с молекулами среды, расстояние между двумя очередными столкновениями, факт поглощения или рассеяния, угол отражения на границе раздела двух сред или ото дна – все эти характеристики процесса переноса света сквозь среду являются случайными величинами, с заданными математическими законами распределения).

Вторая особенность – оценки интенсивности и ее производной по коэффициенту рассеяния производятся параллельно по одним и тем же моделируемым на ЭВМ физическим траекториям частиц. С вычислением приближенного значения самого функционала одновременно (по одной и той же траектории) производится оценка погрешности вычислений. И, наконец, третья особенность методов Монте-Карло – это их экономичность. Физический процесс распространения частиц можно отождествлять с однородными цепями Маркова. Состояние частицы (ее координаты, скорость и направление полета) в момент текущего столкновения зависит только от предыдущего столкновения и не зависит от столкновений, предшествующих последнему. Это нам даст возможность экономить память ЭВМ, зарезервируя место только для характеристик очередного столкновения.

В работе [9] с использованием аппарата методов Монте-Карло, разработанного в работах [1-8] для стационарного случая, получены расчетные формулы для оценки значений интенсивности излучения и ее производной по коэффициенту рассеяния, необходимые для приближенного решения линеаризованной системы уравнений, получаемой из системы: $I_1(\sigma_1,...,\sigma_n) = I_1^*$, …, $I_m(\sigma_1,...,\sigma_n) = I_m^*$.

В работах [9,10] помимо получения расчетных формул также приведены результаты численных экспериментов. При этом алгоритмическая часть работы по упомянутым формулам освещена не была. В настоящей статье мы восполняем этот пробел. Параллельно описываем алгоритм моделирования физического процесса переноса частиц на ЭВМ по методу Монте-Карло. Приступаем теперь к описанию схемы моделирования траекторий фотонов и алгоритма оценивания искомых функционалов вдоль этих траекторий. Всюду в дальнейшем буквой α, возможно с нижним индексом, будем обозначать случайное число, равномерно распределенное на отрезке [0,1] и генерируемое самой ЭВМ или по специальному алгоритму.

Шаг 1. Выбор вектора направления $\omega_0 = (a_0, b_0, c_0)$ вылета фотона из источника.

Начальное направление фотона, распределенное изотропно в круговом коническом телесном угле $\Omega_{ист.} = [\cos\theta_{ист.}, 1] \times [0, 2\pi]$, моделируем методом исключения [2,6,8], здесь $\theta_{ист.}$- угол раствора источника относительно оси источника, выраженной вектором $\bar{n} = (0,0,1)$. Явное выражение плотности источников дано в [10].

Пусть $\mu = 1 - \alpha_1(1 - \cos\theta_{ист.})$, $\xi = 1 - 2\alpha_2$, $\eta = 1 - 2\alpha_3$, $d = \xi^2 + \eta^2$.

Если $d \le 1$, то полагаем $a_0 = \xi\sqrt{(1-\mu)/d}$, $b_0 = \eta\sqrt{(1-\mu)/d}$, $c_0 = \mu$.

Шаг 2. 1) Нахождение координат x_1, y_1, z_1 точки достижения фотоном поверхности водной среды:

$x_1 = x_{ист.} + a_0(H_{пов.} - z_{ист.})/c_0, \quad y_1 = y_{ист.} + b_0(H_{пов.} - z_{ист.})/c_0, \quad z_1 = H_{пов.}$.

2) Моделирование типа столкновения на поверхности водной среды(отражение или преломление):

Если $\alpha > Y(\omega_0)$, то определяется "отражение" и делается переход на **шаг 11;**

иначе выбираем преломление в направлении $\overline{\omega}_1 = (a_1, b_1, c_1)$,

где $a_1 = a_0 / n_{вода}$, $b_1 = b_0 / n_{вода}$, $c_1 = \sqrt{n_{вода}^2 - 1 - c_0^2} / n_{вода}$,

$n_{вода}$ - показатель преломления воды относительно вакуума,

$Y(\omega_0) = (c_0 - B)^2 (c_0^2 B^2 + A^2)\ (c_0 + B)^{-2} (c_0 B + A)^{-2}$ - френелевский коэффициент отражения, $A = 1 - c_0^2$, $B = \sqrt{n_{вода}^2 - 1 - c_0^2}$.

3) Определение момента времени достижения фотоном поверхности водной среды: $t_1 = H_{пов.} / (\mu c)$, c - скорость света в вакууме.

Шаг 3. Выбор длины свободного пробега l фотона в воде методом розыгрыша по минимуму[2,6]:

$l = \min\{l_1, ..., l_n\}$, где $l_i = -\ln \alpha_i / \sigma_i$, $i = 1, ..., n$.

Шаг 4. 1) Вычисление координат очередной точки столкновения фотона с элементами водной среды:

$x_2 = x_1 + a_1 l, \quad y_2 = y_1 + b_1 l, \quad z_2 = z_1 + c_1 l$.

2) Определение времени t_2 этого столкновения: $t_2 = t_1 + |\bar{r}_2 - \bar{r}_1| / v$,

где $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ - радиус-векторы точек столкновений,

v - скорость света в воде.

Шаг 5. Проверка вылета фотона из водной среды:

Если $z_2 < H_{пов.}$, то переход на **шаг 11**.

Шаг 6. Проверка достижения фотоном дна водоема:

Если $z_2 < H_{дно}$, то переход на **шаг 7**;

Иначе

1) $x_2 = x_1 + a_1(H_{дно} - z_1)/c_1$, $y_2 = y_1 + b_1(H_{дно} - z_1)/c_1$, $z_2 = H_{дно}$.

2) Розыгрыш судьбы фотона:

Моделируется очередное значение α. Если $\alpha > Al$ - альбедо-вероятности отражения от поверхности дна, то определяется «поглощение» и делается переход на **шаг 11**;

Иначе выбирается новое направление пробега согласно закону Ламберта:

моделируются случайные величины $\mu = \sqrt{\alpha_1}$, $\xi = 1 - 2\alpha_2$, $\eta = 1 - 2\alpha_3$.

Пусть $d = \xi^2 + \eta^2$. При $d \le 1$ положим $a_2 = \xi\sqrt{(1-\mu)/d}$, $b_2 = \eta\sqrt{(1-\mu)/d}$, $c_2 = -\mu$.

3) переход на **шаг 8**.

Шаг 7. Выбор типа столкновения (поглощение или рассеяние):

Определение j–номера слоя, где находится точка $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Если $\alpha > \sigma_{s_j} / \sigma_j$ - вероятности выживания в слое с номером j, то определяется "поглощение", переход на **шаг 11**;

Иначе – «рассеяние» согласно индикатрисе рассеяния $g(\mu)$.

Известно [6], что для моделирования выборочного значения случайной величины μ с кусочно-постоянной плотностью распределения $g(\mu)$ такой, что $g(\mu) = g_i$ в интервалах

$\mu_{i-1} \le \mu \le \mu_i$, $i = 1,...,n$, из выборочного значения величины α последовательно вычитаются величины $(g_0 + g_1)(\mu_1 - \mu_0)/2$,..., $(g_{k-1} + g_k)(\mu_k - \mu_{k-1})/2$ до получения первого отрицательного значения, равного некоторому L. Откуда

$\mu = \mu_k + \left(-g_k(\mu_k - \mu_{k-1}) + \sqrt{g_k^2(\mu_k - \mu_{k-1})^2 + 2L(g_k - g_{k-1})(\mu_k - \mu_{k-1})}\right)/(g_k - g_{k-1})$.

Табличные значения g_i кусочно-постоянной функции $g(\mu)$ заимствуем из [4].

Выбираем теперь направление нового пробега $\overline{\omega}_2 = (a_2, b_2, c_2)$:

$a_2 = a_1\mu - (b_1\xi + a_1c_1\eta)D$, $b_2 = b_1\mu - (a_1\xi + b_1c_1\eta)D$, $c_2 = c_1\mu - (1 - c_1^2)\eta D$,

где $\xi = 1 - 2\alpha_1$, $\eta = 1 - 2\alpha_2$, $d = \xi^2 + \eta^2 \le 1$, $D = \sqrt{(1-\mu^2)(1-c_1^2)^{-1}d^{-1}}$.

Шаг 8. Нахождение $\bar{r}_{пов.}$ - точки пересечения луча $\left|\bar{r}_2 - \bar{r}_{пр.}\right|$ с плоскостью $z = H_{пов.}$:

$x_{пов.} = x_{пр.} + a_{пр.}(H_{пов.} - z_{пр.})/c_{пр.}$, $y_{пов.} = y_{пр.} + b_{пр.}(H_{пов.} - z_{пр.})/c_{пр.}$, $z_{пов.} = H_{пов.}$.

Шаг 9.

1) Для текущей точки столкновения нахождение полного времени блуждания фотона с момента вылета из источника:

$t^* = t_2 + \left|\bar{r}_{пов.} - \bar{r}_2\right|/v + \left|\bar{r}_{пр.} - \bar{r}_{пов.}\right|/c$.

2) Нахождение единичного вектора направления к поверхности:

$\overline{\omega}_{пов.} = (\bar{r}_{пов.} - \bar{r}_2)/\left|\bar{r}_{пов.} - \bar{r}_2\right|$.

3) Нахождение косинуса угла между векторами $\overline{\omega}_{пов.}$ и $\overline{\omega}_2$: $\mu_1 = (\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_{пов.})$.

4) Для всех слоев с номерами $i = 1,..,n$ вычисление

$w_i := w_i + \chi_i/\sigma_i - l_i^{(1,2)} - l_i$,

где $\chi_i = 1$, если $\bar{r}_2$ находится в i –ом слое, иначе $\chi_i = 0$,

$l_i^{(1,2)}$ и l_i - длины тех частей отрезков $\left|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\right|$ и $\left|\bar{r}_{пов.} - \bar{r}_2\right|$, которые приходятся на i -й слой.

5) Для всех интервалов времени зондирования с номерами $k = 1,..,m$ вычисление значений весовой функции:

$$\varphi_k = \sigma_1 \exp\left(-\sum_{i=1}^{j}\sigma_i l_i\right)\frac{\sigma_{s_j} g(\mu_1)}{2\pi\left|\bar{r}_{пов.} - \bar{r}_2\right|\sigma_j}\Delta_{\Omega_{пр.}}(\overline{\omega}_{пр.})\Delta_k(t^*)(1 - Y(\overline{\omega}_{пов.})),$$

где $g(\mu)$ - кусочно-постоянная плотность распределения косинуса угла рассеяния, заданная в [4],

$\Delta_k(t^*) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t^* \in [t_{k-1}, t_k], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - индикатор k –го интервала времени,

$\Delta_{\Omega_{пр.}}(\overline{\omega}_{пр.}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \overline{\omega}_{пр.} \in \Omega_{пр.}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - индикатор угла раствора приемника излучений.

6) Для всех $k = 1,..,m$ и $i = 1,..,n$ вычисление суммы вкладов:

$\xi(k) := \xi(k) + \varphi_k$, $\eta(k,i) := \eta(k,i) + \varphi_k w_i$.

Шаг 10. 1) Прибавление к счетчику столкновений единицы: $st := st + 1$.

2) $x_1 := x_2$, $y_1 := y_2$, $z_1 := x_2$, $a_1 := a_2$, $b_1 := b_2$, $c_1 := c_2$.

3) Переход на **шаг 3** для дальнейшего моделирования текущей траектории фотона.

Шаг 11. 1) Прибавление к счетчику траекторий единицы: $tr := tr + 1$.

2) Вычисление сумм для несмещенных оценок интенсивности и ее производной:

$S_1(k) := S_1(k) + \xi(k)$, $S_2(k,i) := S_2(k,i) + \eta(k,i)$.

3) Если $tr < N$, где N -заданное количество траекторий, то моделируется новая траектория- переход на **шаг 1**;

иначе получаем оценку искомых функционалов:

$$I_k(\sigma_1,...,\sigma_n) \approx S_1(k)/N, \quad \frac{\partial I_k(\sigma_1,...,\sigma_n)}{\partial \sigma_{s_i}} \approx S_2(k,i)/N, \quad \text{где} \quad k=1,..,m, \quad i=1,..,n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антюфеев В.С., Назаралиев М.А. Обратные задачи атмосферной оптики. – Новосибирск, 1988.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования.–М.: Наука, 1976.
3. Ермаков С.М. Метод Монте–Карло и смежные вопросы. –М.: Наука, 1975.
4. Кондратьев К.Я., Кантор Р.Р. и др. Численное моделирование в задачах дистанционного зондирования. –Ленинград: Наука, 1987.
5. Марчук Г.И., Михайлов Г.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. – Новосибирск: Наука, 1988.
6. Михайлов Г.А. Некоторые вопросы теории методов Монте–Карло. –Новосибирск: Наука, 1974.
7. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. –Новосибирск: Наука, 1990.
8. Соболь И.М. Метод Монте–Карло. –М.: Наука, 1968.
9. Абиев Н.А. Применение методов Монте-Карло к нестационарным задачам оптического дистанционного зондирования // Вестн. Иссык-Кульск.гос.ун-та.–2002. –№7. –С. 42-47
10. .Абиев Н.А. Решение методом Монте-Карло задачи восстановления коэффициента рассеяния плоского детерминированного слоя водной среды // Там же. –С.47 -52 .