УДК 532.546

М.У. Мурзакматов, К.А. Исабеков

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД МЕТОДОМ ФРАГМЕНТОВ

Рассматривается начально–краевая задача для неустановившейся фильтрации подземных вод. Разрабатывается алгоритм численного решения задачи методом конечных элементов с использованием призматических фрагментов.

В классической теории метода конечных элементов в качестве элемента обычно используется треугольная пирамида (тетраэдр) [1]. В пространственных задачах теории фильтрации подземных вод область фильтрации предполагается цилиндрической, поэтому такую область удобно разбивать на призматические фрагменты. В данной работе, в отличие от [2,3], алгоритм приближенного решения задачи основан на методе конечных элементов с призматическими фрагментами.

Пусть нестационарная фильтрация подземных вод описывается уравнением

$$LH(x,y,z,t)=W(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in V,\quad t>0 \tag{1}$$

с начальным

$$H(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in V \tag{2}$$

и граничным

$$lH(x,y,z,t)=\alpha(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Sigma,\quad t>0 \tag{3}$$

условиями, где

$$L=\mu\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial}{\partial z}\right)+Q,$$

$$l=k\left[\frac{\partial}{\partial x}cos(n,x)+\frac{\partial}{\partial y}cos(n,y)+\frac{\partial}{\partial z}cos(n,z)\right]-\beta(x,y,z,t),$$

$H=H(x,y,z,t)$ – функция напора; $k=k(x,y,z)$ – коэффициент фильтрации; $\mu=\mu(x,y,z)$ – коэффициент упругоемкости пласта; $W=W(x,y,z,t)$ – заданная возмущающая функция, описывающая влияние инфильтрации, испарения, источников и стоков; $\varphi(x,y,z)$ – начальное распределение напоров; $Q=Q(x,y,z,t)$, $\alpha(x,y,z,t)$, $\beta(x,y,z,t)$ – заданные функции; V – область фильтрации цилиндрической формы, $\Sigma=\partial V$ – ее граница; $\vec{n}=(cos(n,x),cos(n,y),cos(n,z))$ – внешняя нормаль к границе области.

Если считать, что поверхность Σ состоит из $\Sigma_б$, $\Sigma_н$, $\Sigma_в$: $\Sigma=\Sigma_б+\Sigma_н+\Sigma_в$, , то на боковой поверхности $\Sigma_б$ имеет место условие (3), а на поверхностях $\Sigma_в$ и $\Sigma_н$ выполняются условия

$$H=H_1(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Sigma_в, \tag{4}$$

$$k\frac{\partial H}{\partial n}=0,\ (x,y,z)\in\Sigma_н\ . \tag{5}$$

Но условия (4) и (5) получаются из более общего условия (3) при различных значениях функции α и β.

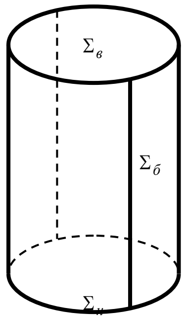

Рис. 1

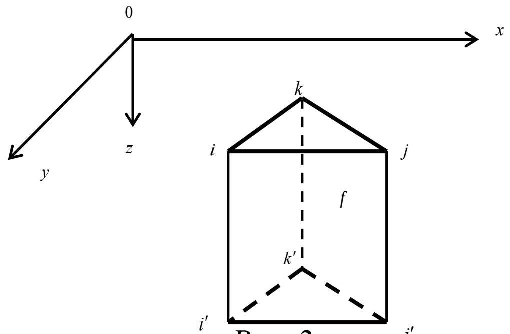

Рис. 2

Разбиваем область V на m треугольных призм и рассмотрим фрагмент (f), образованный из призмы с вершинами i, j, k, $i'=i+\Delta i$, $j'=j+\Delta j$, $k'=k+\Delta k$ (рис.2).

В фрагменте (f) функция $H^{(f)}(x,y,z,t)$ образуется в виде

$$H^{(f)}(x,y,z,t)=H_i^{(f)}(t)N_i(x,y)\,\Phi_i(z)+H_j^{(f)}(t)N_j(x,y)\,\Phi_j(z)+$$

$$+H_k^{(f)}(t)N_k(x,y)\,\Phi_k(z)+H_{i'}^{(f)}(t)N_i(x,y)\,\Phi_{i'}(z)+$$

$$+H_{j'}^{(f)}(t)N_j(x,y)\,\Phi_{j'}(z)+H_{k'}^{(f)}(t)N_k(x,y)\,\Phi_{k'}(z), \qquad (6)$$

где

$$N_i(x,y)=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix+c_iy),\quad N_j(x,y)=\frac{1}{2\Delta}(a_j+b_jx+c_jy),\quad N_k(x,y)=\frac{1}{2\Delta}(a_k+b_kx+c_ky),$$

$$\begin{cases} a_i = x_jy_k - x_ky_j, \\ b_i = y_j - y_k, \\ c_i = x_k - x_j, \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_ky_i - x_iy_k, \\ b_j = y_k - y_i, \\ c_j = x_i - x_k, \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_iy_j - x_jy_i, \\ b_k = y_i - y_j, \\ c_k = x_j - x_i, \end{cases} \quad 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix},$$

$$H_i^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_i, y_i, z_i, t), \qquad H_{i'}^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_i, y_i, z_i+\Delta z_i, t),$$

$$H_j^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_j, y_j, z_j, t), \qquad H_{j'}^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_j, y_j, z_j+\Delta z_j, t),$$

$$H_k^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_k, y_k, z_k, t), \qquad H_{k'}^{(f)}(t)=H^{(f)}(x_k, y_k, z_k+\Delta z_k, t),$$

$$\Phi_i(z)=(z_{i+1}-z)/\Delta z_i,\ \Phi_{i'}(z)=(z-z_i)/\Delta z_i, \qquad \Delta z_i = z_{i+1}-z_i,$$
$$\Phi_j(z)=(z_{j+1}-z)/\Delta z_j,\ \Phi_{j'}(z)=(z-z_j)/\Delta z_j, \qquad \Delta z_j = z_{j+1}-z_j,$$
$$\Phi_k(z)=(z_{k+1}-z)/\Delta z_k,\ \Phi_{k'}(z)=(z-z_k)/\Delta z_k, \qquad \Delta z_k = z_{k+1}-z_k.$$

Опуская для удобства записи верхний индекс (f), представим выражение (6) в виде

$$H^{(f)}(x,y,z,t) = H_i(t)F_i+H_j(t)F_j+H_k(t)F_k+H_{i'}(t)F_{i'}+H_{j'}(t)F_{j'}+H_{k'}(t)F_{k'}, \qquad (7)$$

где

$$F_i(x,y,z)=N_i(x,y)\,\Phi_i(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_i$$

$$+b_ix+c_iy)\frac{z_{i+1}-z}{\Delta z_i},$$

$$F_{i'}(x,y,z)=N_i(x,y)\,\Phi_{i'}(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix+c_iy)\frac{z-z_i}{\Delta z_i},$$

$$F_j(x,y,z)=N_j(x,y)\,\Phi_j(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_j+b_jx+c_jy)\frac{z_{j+1}-z}{\Delta z_j},$$

$$F_{j'}(x,y,z)=N_j(x,y)\,\Phi_{j'}(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_j+b_jx+c_jy)\frac{z-z_j}{\Delta z_j},$$

$$F_k(x,y,z)=N_k(x,y)\,\Phi_k(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_k+b_kx+c_ky)\frac{z_{k+1}-z}{\Delta z_k},$$

$$F_{k'}(x,y,z)=N_k(x,y)\,\Phi_{k'}(z)=\frac{1}{2\Delta}(a_k+b_kx+c_ky)\frac{z-z_k}{\Delta z_k}.$$

Непосредственной проверкой можно установить, что

1) в вершине i: $F_i(x_i,y_i,z_i)=1$, $F_{i'}(x_i,y_i,z_i)=F_j(x_i,y_i,z_i)=$
$=F_{j'}(x_i,y_i,z_i)=F_k(x_i,y_i,z_i)=F_{k'}(x_i,y_i,z_i)=0;$

2) в вершине j: $F_j(x_j,y_j,z_j)=1$, $F_i(x_j,y_j,z_j)=F_{i'}(x_j,y_j,z_j)=$
$=F_{j'}(x_j,y_j,z_j)=F_k(x_j,y_j,z_j)=F_{k'}(x_j,y_j,z_j)=0$ и.т.д.

…………………………………………………

6) в вершине k': $F_{k'}(x_k,y_k,z_{k'})=1$, $F_i(x_k,y_k,z_{k'})=F_{i'}(x_k,y_k,z_{k'})=$
$=F_j(x_k,y_k,z_{k'})=F_{j'}(x_k,y_k,z_{k'})=F_k(x_k,y_k,z_{k'})=0.$

Сумма базисных функций в произвольной точке фрагмента (f) равна единице:

$$F_i(x,y,z)+F_{i'}(x,y,z)+\ldots+F_{k'}(x,y,z)=1,$$

следовательно, функции $F_i, F_{i'},\ldots, F_{k'}$ обладают всеми свойствами функций формы в классическом методе конечных элементов.

Если область V аппроксимируется m треугольными призмами, то приближенное решение начально–краевой задачи (1)–(3) ищется в виде

$$H_n(x,y,z,t)=\sum_{f=1}^{m}\sum_{(f)}H^{(f)}(x,y,z,t)=$$

$$=\sum_{f=1}^{m}\sum_{(f)}\left[H_i^{(f)}(t)F_i+H_j^{(f)}(t)F_j+H_k^{(f)}(t)F_k+H_{i'}^{(f)}(t)F_{i'}+H_{j'}^{(f)}(t)F_{j'}+H_{k'}^{(f)}(t)F_{k'}\right]=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}H_s(t)F_s(x,y,z), \qquad (8)$$

где n – число всех узлов сеточной области.

Для приближенного решения задачи (1)–(3) образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s=t_s-t_{s-1}$, $s=1,2,\ldots$. Подставляя вместо $H(x,y,z,t)$ функцию $H_n(x,y,z,t)$ из формулы (8) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем равенство [4,5]

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iiint_V F_i(LH_n-W)dv=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iint_\Sigma F_i(lH_n-\alpha)d\sigma, \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (9)$$

Рассмотрим сначала левую часть равенства (9). Первое слагаемое преобразуется следующим образом:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\iiint_V F_i\mu\frac{\partial H_n}{\partial t}dv=\sum_{j=1}^{n}\iiint_V\mu F_i\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}\left[H_j(t)\cdot F_j(x,y,z)\right]dtdv=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\iiint_V\mu(x,y,z)\;F_i(x,y,z)\;F_j(x,y,z)dv\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial H_j(t)}{\partial t}dt=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} M_{ij} H_j^{(s)} - \sum_{j=1}^{n} M_{ij} H_j^{(s-1)},$$

где

$$M_{ij} = \iiint_V \mu(x,y,z) F_i(x,y,z) F_j(x,y,z) dv,$$

$$H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s), \quad H_j^{(s-1)} = H(x_j, y_j, z_j, t_{s-1}).$$

К остальным слагаемым объемного интеграла применяем первую формулу Грина. Имеем

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) - Q H_n \right] dv -$$

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i W(x,y,z,t) dv =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t) dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial H_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial H_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial H_j}{\partial z} \right) - Q F_j \right] dv -$$

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i W(x,y,z,t) dv = \sum_{j=1}^{n} \left[\sigma H_j^{(s)} + (1-\sigma) H_j^{(s-1)} \right] \Delta t_s \times$$

$$\times \iiint_V \left\{ k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) + [\sigma Q^{(s)} + (1-\sigma) Q^{(s-1)}] F_i F_j \right\} dv -$$

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - \iiint_V \left[\sigma W^{(s)} + (1-\sigma) W^{(s-1)} \right] F_i \Delta t_s dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma H_j^{(s)} N_{ij} \Delta t_s + \sum_{j=1}^{n} (1-\sigma) H_j^{(s-1)} N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - W_i,$$

Здесь $0 < \sigma \le 1,$

$$N_{ij} = \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv +$$

$$+ \iiint_V \left[\sigma Q^{(s)} + (1-\sigma) Q^{(s-1)} \right] F_i(x,y,z) F_j(x,y,z) dv,$$

$$W_i = \iiint_V \left[\sigma W^{(s)} + (1-\sigma) W^{(s-1)} \right] F_i(x,y,z) dv,$$

В правой части формулы (9) получаем

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i (l H_n - \alpha) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_\Sigma F_i \left(k \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) d\sigma \, dt =$$

$$= - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i \left(\beta F_j H_j + \alpha \right) d\sigma =$$

$$= - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma + \sum_{j=1}^{n} \left[\sigma B_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} + (1-\sigma) B_{ij}^{(s-1)} H_j^{(s-1)} \right] \Delta t_s +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)} \right] \Delta t_s,$$

где

$$B_{ij}=\iint_{\Sigma} F_i(x,y,z)F_j(x,y,z)\beta(x,y,z,t)d\sigma,$$

$$A_i=\iint_{\Sigma} F_i(x,y,z)\alpha(x,y,z,t)d\sigma.$$

Подставляя полученные выражения в равенство (9), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}H_j^{(s)} = b_i,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

где

$$a_{ij}=M_{ij}+\sigma(N_{ij}^{(s)}-B_{ij}^{(s)})\Delta t_s,$$

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}\left[M_{ij}-(1-\sigma)(N_{ij}^{(s-1)}-B_{ij}^{(s-1)})\Delta t_s\right]H_j^{(s-1)}+$$

$$+\left[\sigma(W_i^{(s)}+A_i^{(s)})+(1-\sigma)(W_i^{(s-1)}+A_i^{(s-1)})\right]\Delta t_s.$$

Для вершины i элемента (f) уравнение (10) имеет вид

$$a_{ii}H_i^{(s)}+a_{ij}H_j^{(s)}+a_{ik}H_k^{(s)}+a_{ii'}H_{i'}^{(s)}+a_{ij'}H_{j'}^{(s)}+a_{ik'}H_{k'}^{(s)}=f_i. \tag{11}$$

Обозначив

$$Q=\frac{\mu}{\Delta t_s},\qquad F(x,y,z,t)=W(x,y,z,t)+\frac{\mu}{\Delta t_s}H^{(s-1)}(x,y,z)$$

и полагая $\sigma=1$, выпишем формулы для коэффициентов уравнения (11):

$$a_{ii}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_i)dv+\iiint_{(f)} F_i^2Qdv-\iint_{(e)} F_i^2\beta d\sigma-\iint_{(ij')} F_i^2\beta d\sigma-\iint_{(ik')} F_i^2\beta d\sigma,$$

$$a_{ij}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_j)dV+\iiint_{(f)} F_i\ F_jQdV-\iint_{(e)} F_i\ F_j\beta d\sigma-\iint_{(ij')} F_i\ F_j\beta d\sigma,$$

$$a_{ik}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_k)dv+\iiint_{(f)} F_i\ F_kQdv-\iint_{(e)} F_i\ F_k\beta d\sigma-\iint_{(ik')} F_i\ F_k\beta d\sigma,$$

$$a_{ii'}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_{i'})dv+\iiint_{(f)} F_iF_{i'}Qdv-\iint_{(ij')} F_iF_{i'}\beta d\sigma-\iint_{(ik')} F_iF_{i'}\beta d\sigma,$$

$$a_{ij'}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_{j'})dv+\iiint_{(f)} F_iF_{j'}Qdv-\iint_{(ij')} F_iF_{j'}\beta d\sigma,$$

$$a_{ik'}=\iiint_{(f)} kq(F_i,F_{k'})dv+\iiint_{(f)} F_iF_{k'}Qdv-\iint_{(ik')} F_iF_{k'}\beta d\sigma,$$

$$f_i=\iiint_{(f)} F_iFdv+\iint_{(e)} F_i\alpha d\sigma+\iint_{(ij')} F_i\alpha d\sigma+\iint_{(ik')} F_i\alpha d\sigma,$$

где

$$q(F_i,F_j)=\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{\partial F_j}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{\partial F_j}{\partial y}+\frac{\partial F_i}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial z},$$

а интегралы по $(f), (e), (ij'), (ik')$ берутся соответственно по элементу f, треугольнику с вершинами i, j, k и прямоугольникам с вершинами i, j, j', i' и i, k, k', i'.

Работа алгоритма отлажена на решении следующей тестовой задачи. Задача (1)–(3) решается в цилиндрической области $V=\{x^2+y^2\le 0.25,\quad 0\le z\le 0.4\}$ в течение времени

T=1.0 с шагом $\Delta t = 0.1$. Область V разбита на 108 треугольных призм высотой $\Delta z = 0.2$. В уравнении (1) заданы функции $k(x,y,z)=x+y+z+2$, $Q(x,y,z)=0$, $W(x,y,z,t)=\mu H(x,y,z,t)-4e^t[2k(x,y,z)-1]$. Искомой функцией является

$$H(x,y,z,t)=(x^2+y^2+z^2+1)e^t.$$

В таблицах 1 и 2 даны точные и приближенные решения соответственно стационарной и нестационарной задач, полученных с применением тетраэдральных и призматических элементов. В таблицах приведены результаты в узлах, лежащих в первом октанте, причем узлы 1, 38 и 75 расположены на оси цилиндра, узлы 5, 42 и 79 – на границе, а остальные узлы являются внутренними.

Сравнение результатов дает основание сделать заключение о равноценности итогов применения тетраэдральных и призматических элементов, а последние имеют явное преимущество перед классическими элементами в смысле трудоемкости и удобства при проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979. –392 с.
2. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Имангазиева К. Краевая задача для пространственной квазистационарной фильтрации. //Материалы научной конференции, посв. 5– летию образования НГУ, -Нарын, 2001.
3. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Джаныбеков Б.С. Нестационарное пространственное течение подземных вод. //Вестник Иссык–Кульского университета, 2001, №5, с. 152–158.
4. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989.–183 с.
5. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. –Фрунзе : Илим, 1982.–214 с.